

УДК 621.372.82

**ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ВІДКРИТОГО
НЕОДНОРІДНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ХВИЛЕВОДУ**

Гусєва О. В., к.т.н, доцент; Горб М. С., аспірант
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

**EIGENVALUE PROBLEM OF OPEN INHOMOGENEOUS
DIELECTRIC WAVEGUIDE**

Guseva E. V, PhD, Associate Professor; Gorb M. S, Postgraduate Student
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

Вступ

При аналізі поля в діелектричному об'єкті, створюваного заданим джерелом струму, можна застосувати метод розкладу поля по власним функціям. В такому випадку задача має розв'язуватися в два етапи [1]: на першому етапі визначаються власні хвилі, які можуть існувати в даному об'єкті, на другому — на основі заданого джерела збудження визначаються амплітуди знайдених власних хвиль. Даний підхід є актуальним при розв'язку задачі мікрохвильової візуалізації, оскільки дозволяє звести тривимірну поздовжньо однорідну задачу до двовимірної, зменшуючи при цьому чисельні затрати [2 с.161]. Метою даної роботи є визначення власних хвиль відкритого неоднорідного діелектричного хвильоводу, який можна розглядати як спрощену модель об'єкта досліджень в мікрохвильовій візуалізації.

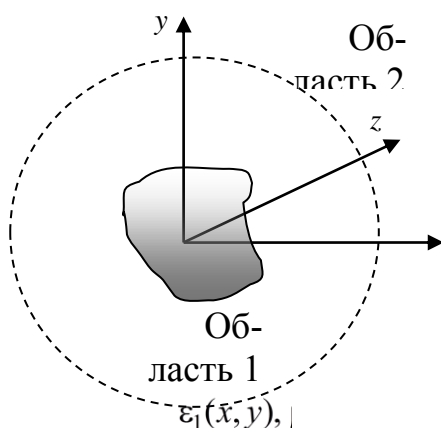
Постановка задачі

Рис. 1. Об'єкт дослідження

Розглядається структура довільної форми в поперечному перетині, з однорідними параметрами в поздовжньому – z – напрямку і неоднорідними в поперечному – Рис.1. Оскільки об'єкт характеризується неоднорідними параметрами — відносно діелектричною проникністю — $\epsilon_1(x, y)$, тому для знаходження власних хвиль необхідно застосовувати чисельний метод.

Поле в області 1, яка обмежує неоднорідний об'єкт дослідження, знаходиться методом кінцевих елементів, який здатен описати структуру довільної форми з довільними параметрами. У зовнішній необмеженій області 2 поле представляється у вигляді циліндричних гармонік. В основі даного алгоритму покладено роботи [3,4].

Математичне формулювання задачі

Залежність від часу прийнята у вигляді — $e^{j\omega t}$, повздовжня однорідність хвильоводу призводить до розв'язку по z — координаті у вигляді — $e^{-j\beta z}$ [5]. Множник $e^{(j\omega t - \beta z)}$ надалі опускається. При вирішенні задачі на власні значення розглядаються однорідні диференціальні рівняння без збуджуючого струму, шуканим при цьому є повздовжня стала розповсюдження β на фіксованій частоті. Розглянемо рівняння для електричного поля [5]:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_1} \operatorname{rot} \vec{E}\right) - k_0^2 \varepsilon_1(x, y) \vec{E} = 0$$

Розділивши поле на поперечну та повздовжню складові [6 с.256, 7 с.98] і застосувавши до отриманих рівнянь метод Гальоркіна [8 с.22], після перетворень [9] отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_1} \cdot \iint_S \left((\vec{\nabla}_t \times \vec{T}_t) \cdot (\vec{\nabla}_t \times \beta \vec{E}_t) + \beta^2 \vec{T}_t \cdot \vec{\nabla}_t (-jE_z) \right) dS + \frac{\beta^2}{\mu_1} \cdot \iint_S \vec{T}_t \cdot \beta \vec{E}_t dS = \\ & = k_0^2 \varepsilon_1 \iint_S \vec{T}_t \cdot \beta \vec{E}_t dS - \frac{1}{\mu_1} \cdot \oint_L \vec{T}_t \cdot (\vec{n} \times \vec{\nabla}_t \times \beta \vec{E}_t) dl \\ & \frac{1}{\mu_1} \cdot \iint_S \left(\vec{\nabla}_t T_z \cdot \vec{\nabla}_t (-jE_z) + \vec{\nabla}_t T_z \cdot \beta \vec{E}_t \right) dS = \\ & = k_0^2 \varepsilon_1 \iint_S T_z \cdot (-jE_z) dS + \frac{1}{\mu_1} \cdot \oint_L \left(T_z \cdot \frac{\partial(-jE_z)}{\partial n} + T_z \vec{n} \cdot (\beta \vec{E}_t) \right) dl \end{aligned} \quad (1)-(2)$$

де: k_0 — хвильове число вільного простору

$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y)$, $\mu_1 = \mu_1(x, y)$ — відносні діелектрична та магнітні проникності

S — площа області 2, обмеженої контуром L — Рис.1

\vec{E}_t , E_z — поперечні та повздовжня компоненти поля

\vec{T}_t , T_z — вагові функції

$\vec{\nabla}_t = \vec{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ — градієнт за поперечними координатами

В області 2 поле представимо у вигляді розкладу по циліндричним гармонікам:

$$\begin{aligned} E_z^{\text{exp}} &= \sum_{m=0}^M \left(A_m^e \cos(m\phi) + A_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot H_m^{(2)}(\chi_2 r) \\ H_z^{\text{exp}} &= \sum_{m=0}^M \left(B_m^e \cos(m\phi) + B_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot H_m^{(2)}(\chi_2 r) \end{aligned}$$

де: $\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \beta^2}$ — поперечне хвильове число в зовнішній області

$A_m^e, A_m^o, B_m^e, B_m^o$ — невідомі амплітуди

Розглядаючи поверхневі хвилі при дійсній діелектричній проникності, для яких χ_2 уявне ($\chi_2 = -j|\chi_2|$) [1 с.25, 5 с.265], можна перейти від функцій Ханкеля третього роду з уявним аргументом до модифікованої функції Ханкеля (функції Макдональда), з дійсним аргументом $H_m^{(2)}(-j|\chi_2|r) \sim K_m(|\chi_2|r)$, тоді вирази для поля у зовнішній області приймуть вигляд:

$$E_z^{\text{exp}} = \sum_{m=0}^M \left(A_m^e \cos(m\phi) + A_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot K_m(\chi_2 r) \quad (3)-(4)$$

$$H_z^{\text{exp}} = \sum_{m=0}^M \left(B_m^e \cos(m\phi) + B_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot K_m(\chi_2 r)$$

де: $\chi_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^2}$ — зміна доданків в порівнянні з вищенаведеним визначенням ($\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \beta^2}$) враховує перехід до функції Макдональда — χ_2 приймає дійсне додатне значення в діапазоні зміни β для поверхневих хвиль (при $\beta > k_2$)

Азимутальні складові поля знаходимо з (3,4), використовуючи відомі співвідношення для хвильоводів [5], але при цьому враховуємо, що $\chi_2^2 < 0$ для поверхневих хвиль:

$$\begin{aligned} E_\phi^{\text{exp}} &= \frac{j\beta}{\chi_2^2 r} \cdot \sum_{m=0}^M m \cdot \left(-A_m^e \sin(m\phi) + A_m^o \cos(m\phi) \right) \cdot K_m(\chi_2 r) - \\ &- \frac{j\omega\mu_2}{\chi_2^2} \cdot \chi_2 \cdot \sum_{m=0}^M \left(B_m^e \cos(m\phi) + B_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot K'_m(\chi_2 r) \\ H_\phi^{\text{exp}} &= \frac{j\beta}{\chi_2^2 r} \cdot \sum_{m=0}^M m \cdot \left(-B_m^e \sin(m\phi) + B_m^o \cos(m\phi) \right) \cdot K_m(\chi_2 r) + \\ &+ \frac{j\omega\epsilon_2}{\chi_2^2} \cdot \chi_2 \cdot \sum_{m=0}^M \left(A_m^e \cos(m\phi) + A_m^o \sin(m\phi) \right) \cdot K'_m(\chi_2 r) \end{aligned} \quad (5)-(6)$$

де: $K'_m(\chi_2 r)$ — похідна від циліндричної функції (по аргументу $\chi_2 r$)

Виконаємо граничні умови на допоміжному контурі L круглої форми радіуса R — Рис. 1, який обмежує об'єкт дослідження. При цьому прирівнюємо дотичні компоненти поля:

$$E_z^{\text{exp}}(R, \phi) = E_z^{\text{FEM}}(R, \phi)$$

$$E_\phi^{\text{exp}}(R, \phi) = E_\phi^{\text{FEM}}(R, \phi)$$

Використовуючи умову ортогональності тригонометричних функцій на контурі L , і переходячи від інтегрування по контуру L до інтегрування по

азимуту в полярній системі координат, після перетворень отримуємо вирази для амплітуд:

$$\begin{aligned}
 A_m^e &= \frac{1}{\pi \cdot K_m(\chi_2 R)} \int_0^{2\pi} E_z^{FEM}(R, \phi) \cdot \cos(m\phi) d\phi \\
 A_m^o &= \frac{1}{\pi \cdot K_m(\chi_2 R)} \int_0^{2\pi} E_z^{FEM}(R, \phi) \cdot \sin(m\phi) d\phi \\
 B_m^e &= \frac{\chi_2}{j\omega\mu_2 \cdot \pi \cdot K'_m(\chi_2 R)} \left(\frac{j\beta m}{\chi_2^2 R} A_m^o \cdot \pi \cdot K_m(\chi_2 R) - \int_0^{2\pi} E_\phi^{FEM}(R, \phi) \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \\
 B_m^o &= \frac{\chi_2}{j\omega\mu_2 \cdot \pi \cdot K'_m(\chi_2 R)} \left(\frac{-j\beta m}{\chi_2^2 R} A_m^e \cdot \pi \cdot K_m(\chi_2 R) - \int_0^{2\pi} E_\phi^{FEM}(R, \phi) \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \\
 \text{при } m=0: \quad A_0^e &= \frac{1}{2\pi \cdot K_0(\chi_2 R)} \int_0^{2\pi} E_z^{FEM}(R, \phi) d\phi \\
 B_0^e &= \frac{-\chi_2}{2j\omega\mu_2 \cdot \pi \cdot K'_0(\chi_2 R)} \int_0^{2\pi} E_\phi^{FEM}(R, \phi) d\phi \\
 A_0^o &= B_0^o = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

де: $E_z^{FEM}(R, \phi)$, $E_\phi^{FEM}(R, \phi)$ - ϕ та z — компоненти поля на контурі L , знайдені методом кінцевих елементів

Лінійні інтеграли в (1)-(2) можна представити у вигляді: [3, 6 с.257]:

$$\begin{aligned}
 \oint_L \vec{T}_t \cdot (\vec{n} \times \vec{\nabla}_t \times \beta \vec{E}_t) dl &= j\omega\mu_2 \beta \oint_L \vec{T}_t \cdot \vec{\Phi} H_z^{FEM} dl \\
 \oint_L \left(T_z \cdot \frac{\partial(-jE_z)}{\partial n} + T_z \vec{n} \cdot (\beta \vec{E}_t) \right) dl &= \omega\mu_2 \oint_L T_z H_\phi^{FEM} dl
 \end{aligned}$$

Виконуючи граничні умови:

$$\begin{aligned}
 H_z^{\text{exp}}(R, \phi) &= H_z^{FEM}(R, \phi) \\
 H_\phi^{\text{exp}}(R, \phi) &= H_\phi^{FEM}(R, \phi)
 \end{aligned}$$

лінійні інтеграли набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 \oint_L \vec{T}_t \cdot (\vec{n} \times \vec{\nabla}_t \times \beta \vec{E}_t) dl &= j\omega\mu_2 \beta \oint_L \vec{T}_t \cdot \vec{\Phi} H_z^{\text{exp}}(R, \phi) dl \\
 \oint_L \left(T_z \cdot \frac{\partial(-jE_z)}{\partial n} + T_z \vec{n} \cdot (\beta \vec{E}_t) \right) dl &= \omega\mu_2 \oint_L T_z H_\phi^{\text{exp}}(R, \phi) dl
 \end{aligned} \tag{8}$$

де: $H_z^{\text{exp}}(R, \phi)$, $H_\phi^{\text{exp}}(R, \phi)$ — магнітне поле (вирази (5,6)) у зовнішній області, з амплітудами $A_m^e, A_m^o, B_m^e, B_m^o$ визначеними у (7) через значення поля на

контурі L , знайдене методом кінцевих елементів — $E_z^{FEM}(R, \phi)$, $E_\phi^{FEM}(R, \phi)$

Отже, після виконання граничних умов отримаємо задачу сформульовану відносно поля в 1 області, а зовнішня область 2 враховується через лінійні інтеграли (8).

Для апроксимації повздовжньої компоненти поля E_z використаємо вузлові кінцеві елементи [8-10]:

$$E_z \cong \sum_{j=1}^3 e_{zj} \cdot \alpha_j \quad (9)$$

e_{zj} — значення поля у вузлах трикутника

α_j — вузлові базисні функції

Оскільки векторне поле \vec{E}_t незручно представляти вузловими кінцевими елементами через важкість у виконанні граничних умов, та появу нефізичних рішень [8 с. 273, 9], тому застосуємо векторні кінцеві елементи [8-11]:

$$\vec{E}_t \cong \sum_{n=1}^3 e_{tn} \cdot \vec{W}_{tn}$$

e_{tn} — тангенціальна складова поля на n -ій стороні елемента

\vec{W}_{tn} — векторні базисні функції

Поле $E_z^{FEM}(R, \phi)$ на обмежуючому контурі L в межах кожного граничного елемента, тобто трикутника одна сторона якого лежить на контурі L , також представляється базисними вузловими функціями, а для представлення поля на всьому контурі необхідно врахувати всі граничні елементи:

$$E_z^{FEM}(R, \phi) = \sum_{Gr. Елем} \sum_{j=1}^3 e_{zj} \cdot \alpha_j(L) \quad (10)$$

де враховано, що одна з базисних функцій на стороні трикутника дорівнює нулю [8,10]

$\alpha_j(L)$ — позначення, яке підкреслює, що цікавить тільки значення поля на граничній стороні, тому $\alpha_j(L)$ — функція однієї змінної (друга змінна виражається через рівняння граничної сторони трикутника)

Поперечне поле \vec{E}_t на обмежуючому контурі L описується векторними базисними функціями:

$$\vec{E}_t(L) = \sum_{Gr. Елем} \sum_{n=1}^3 e_{tn} \cdot \vec{W}_{tn}(L)$$

Азимутальна складова поля на зовнішньому контурі $E_\phi^{FEM}(R, \phi)$ дорівнює проекції (скалярному добутку) $\vec{E}_t(L)$ на азимутальний орт $\vec{\phi}$:

$$E_{\vec{\phi}}^{FEM}(R, \phi) = \vec{\phi} \cdot \vec{E}_t(L)$$

$\vec{\phi} = -\sin(\phi) \cdot \vec{x} + \cos(\phi) \cdot \vec{y}$ — розклад азимутального орта $\vec{\phi}$ по проєкціям, де ϕ - азимутальний кут в полярній системі координат

$$E_{\vec{\phi}}^{FEM}(R, \phi) = \vec{\phi} \cdot \vec{E}_t(L) \cong \sum_{Gr.Елем} e_m \cdot \vec{\phi} \cdot \vec{W}_m(L) \quad (11)$$

У (11) враховано, що для представлення $E_{\vec{\phi}}^{FEM}(R, \phi)$ в межах одного трикутника достатньо лише однієї базисної функції \vec{W}_m , яка має ненульову тангенціальну складову на граничній стороні даного трикутника (проєкція двох інших базисних функцій на $\vec{\phi}$ приблизно дорівнює нулю), а загальне поле на всьому контурі складається з полів на всіх граничних елементах.

Підставимо (8) у (1)-(2), враховуючи (5)-(7) і вигляд поля на обмежуючому контурі - (10)-(11), після перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{Елементів}} \left\{ \sum_{n=1}^3 e_m \iint_{S_{\Delta}} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_m) \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{tl}) dS + (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_1 \mu_1) \cdot \sum_{n=1}^3 e_m \iint_{S_{\Delta}} (\vec{W}_m \cdot \vec{W}_{tl}) dS + \beta^2 \sum_{j=1}^3 e_{zj} \iint_{S_{\Delta}} (\vec{W}_{tl} \cdot \vec{\nabla}_t \alpha_j) dS \right\} - \\ & - \frac{\chi_2 R \cdot K_0(\chi_2 R)}{2\pi \cdot K_0'(\chi_2 R)} \cdot \sum_{Gr.Елем} e_m \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_m(L) \cdot \vec{\phi} d\phi \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_{tl}(L) \cdot \vec{\phi} d\phi - \\ & - \frac{\beta^2}{\pi \chi_2} \sum_{m=1}^M m \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K_m'(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{Gr.Елем} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_{tl}(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi - \\ & - \frac{\chi_2 R}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{K_m(\chi_2 R)}{K_m'(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{Gr.Елем} e_m \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_m(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_{tl}(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi + \\ & + \frac{\beta^2}{\pi \chi_2} \sum_{m=1}^M m \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K_m'(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{Gr.Елем} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_{tl}(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \sin(m\phi) d\phi - \\ & - \frac{\chi_2 R}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{K_m(\chi_2 R)}{K_m'(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{Gr.Елем} e_m \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_m(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_{tl}(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \sin(m\phi) d\phi = 0 \end{aligned} \quad (12)-(13)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\text{Елементів}} \left\{ \sum_{j=1}^3 e_{zj} \iint_{S_{\Delta}} (\vec{\nabla}_t \alpha_j \cdot \vec{\nabla}_t \alpha_i) dS + \sum_{n=1}^3 e_{tn} \iint_{S_{\Delta}} (\vec{W}_n \cdot \vec{\nabla}_t \alpha_i) dS - k_0^2 \epsilon_1 \mu_1 \sum_{j=1}^3 e_{zj} \iint_{S_{\Delta}} (\alpha_j \cdot \alpha_i) dS \right\} + \\
 & + \frac{k_0^2 R \cdot K'_0(\chi_2 R)}{2\pi \chi_2 \cdot K_0(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot d\phi - \\
 & - \frac{\beta^2}{\pi R \chi_2^3} \sum_{m=1}^M m^2 \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K'_m(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi - \\
 & - \frac{1}{\chi_2 \pi} \cdot \sum_{m=1}^M m \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K'_m(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} e_{tn} \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_n(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi - \\
 & - \frac{\beta^2}{\pi R \chi_2^3} \sum_{j'=1}^{Nn} m^2 \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K'_m(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi + \\
 & + \frac{1}{\chi_2 \pi} \cdot \sum_{m=1}^{Me} m \cdot \frac{K_m(\chi_2 R)}{K'_m(\chi_2 R)} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} e_{tn} \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \vec{W}_n(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi + \\
 & + \frac{k_0^2 R}{\pi \chi_2} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{K'_m(\chi_2 R)}{K_m(\chi_2 R)} \cdot \sum_{j'=1}^{Nn} e_{zj'} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi + \\
 & + \frac{k_0^2 R}{\pi \chi_2} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{K'_m(\chi_2 R)}{K_m(\chi_2 R)} \cdot \sum_{j'=1}^{Nn} e_{zj'} \cdot \left(\sum_{\text{Гр.Елем}} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_j(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi \right) \cdot \int_{\phi 1(e)}^{\phi 2(e)} \alpha_i(L) \cdot \sin(m\phi) d\phi = 0
 \end{aligned}$$

де: $T_z = \alpha_i$ $\vec{T}_t = \vec{W}_l$, $i, l = 1, 2, 3$ — перебір вагових функцій в межах одного трикутника.

У виразах (12,13) введено заміну [12]:

$$\beta \vec{E}_t \rightarrow \vec{E}_t \quad (\beta \cdot \vec{E}_t, \beta \cdot E_{\phi}^{FEM}(R, \phi) \text{ замінюємо на } \vec{E}_t, E_{\phi}^{FEM}(R, \phi))$$

$$-jE_z \rightarrow E_z \quad (-j\vec{E}_z, -jE_z^{FEM}(R, \phi) \text{ замінюємо на } \vec{E}_z, E_z^{FEM}(R, \phi))$$

Символи $\sum_{\text{Елементів}}$, $\sum_{\text{Гр.Елем}}$ у (12,13) означають процедуру «зборки» [8, 13

с 360], яку необхідно провести для врахування всіх кінцевих елементів, при цьому частина рівнянь, яка враховує зв'язок з областю 2 (складові з лінійними інтегралами) обраховуються лише для граничних елементів і вагових функцій, які апроксимують поле на контурі L . Під час зборки необхідно враховувати напрямки векторних базисних функцій \vec{W}_m на спільних сторонах трикутників [9, 11 с.46, 13 с.361]. В результаті зборки формується система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) розміром $N \times N$ (N - загальна кількість глобальних вузлів та сторін трикутників), яку в матричному вигляді можна записати у вигляді:

$$A(\beta) \cdot E = 0 \quad (14)$$

Оскільки залежність елементів матриці $A(\beta)$ від β нелінійна (β входить в аргумент циліндричної функції), тому СЛАР (14) можна розглядати як нелінійну задачу на власні значення [3,14]. В даній роботі для отримання

розв'язку (14), спочатку задача зводиться до лінійної, розкладаючи $A(\beta)$ в ряд Тейлора і утримуючи лише два доданки [14]. Використовуючи власні значення лінійної задачі як початкові наближення при розв'язку нелінійної системи (14) методом зворотних ітерацій [14,16], в результаті якої отримаємо набір власних значень – β_i , та власних хвиль E_i які описують розподіл поля.

Враховуючи вигляд полів на контурі L - (10,11), розпишемо інтеграли, які входять в (12,13) через (7):

$$\int_0^{2\pi} E_z^{FEM}(R, \phi) \cdot \cos(m\phi) d\phi = \sum_{Gr.Елем} \sum_{j=1}^2 e_{zj} \cdot \int_{\phi1(e)}^{\phi2(e)} \alpha_j(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi$$
$$\int_0^{2\pi} E_\phi^{FEM}(R, \phi) \cdot \cos(m\phi) d\phi = \sum_{Gr.Елем} e_{m} \cdot \int_{\phi1(e)}^{\phi2(e)} \vec{W}_m(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi$$

$\phi1(e), \phi2(e)$ - кути, які обмежують граничну сторону, e -ого граничного елемента, а інтервал від 0 до 2π набирається після обходу всіх граничних елементів.

Інтеграли $\int_{\phi1(e)}^{\phi2(e)} \alpha_j(L) \cdot \cos(m\phi) d\phi$, $\int_{\phi1(e)}^{\phi2(e)} \vec{W}_m(L) \cdot \vec{\phi} \cdot \cos(m\phi) d\phi$ можна знайти в ана-

літичному вигляді, записавши базисні функції в полярній системі координат. Подвійні інтеграли по площі трикутників у (12,13) обчислюються в аналітичному вигляді [8-10].

Розв'язуючи задачу збудження відкритого хвильоводу метод розкладу поля по власним функціям необхідно враховувати всі види хвиль, які можуть існувати у хвильоводі. У відкритому хвильоводі можуть існувати поверхневі хвилі, комплексні та неперервний спектр хвиль випромінювання [1,17]. Загальна методологія задачі збудження відкритих хвильоводів наведена у [1,18], але якщо цікавлять лише амплітуди хвиль дискретного спектра – поверхневих та комплексних, то для їх знаходження можна використати метод [19, 20 с.723] – аналогічний тому, який використовується для екранованих хвильоводів. В роботах [21-28] застосовано метод інтегралу Фур'є для розв'язку задачі збудження однорідного діелектричного хвильоводу точковим джерелом.

Чисельні результати

Таблиця.1

Даний метод	ЛЗ	МРЗ
81.855	81.845	82.652
85.118	85.13	85.922
91.723	91.884	92.221
105.093	104.018	104.257
105.095	105.233	105.378
105.093	108.505	108.511
118.05	118.062	118.125

Для перевірки даного алгоритму проведено розрахунок однорідного хвильоводу круглого поперечного перетину, власні числа якого можна знайти методом розділення змінних [5]. Розглядався хвильовод з радіусом $R = 5$ см при довжині хвилі $\lambda = R\sqrt{3}$, з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$. Для розбиття об'єкта на трикутники використовувалась програма [29].. В табл.1 наведені результати розрахунку, які порівнюються з методом розділення змінних (МРЗ), і результатами для лінеарізованої задачі (ЛЗ) на власні значення (14). Як бачимо з табл.1, лінеарізована задача дає точне початкове наближення, а метод зворотних іте-

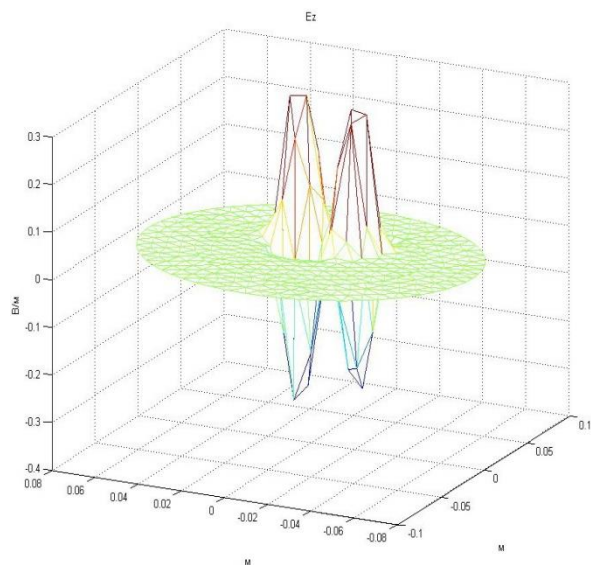
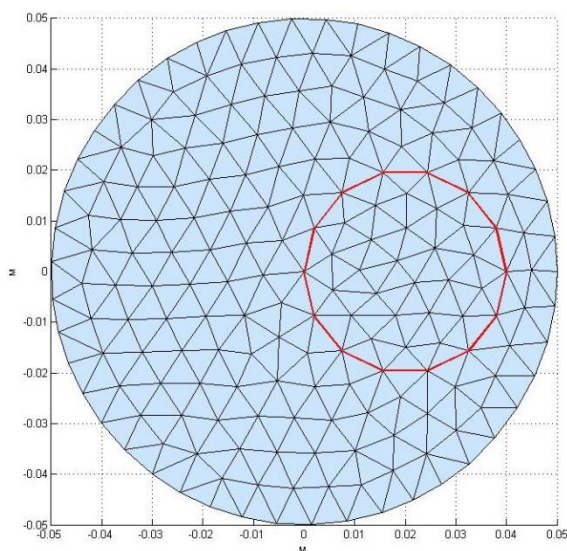
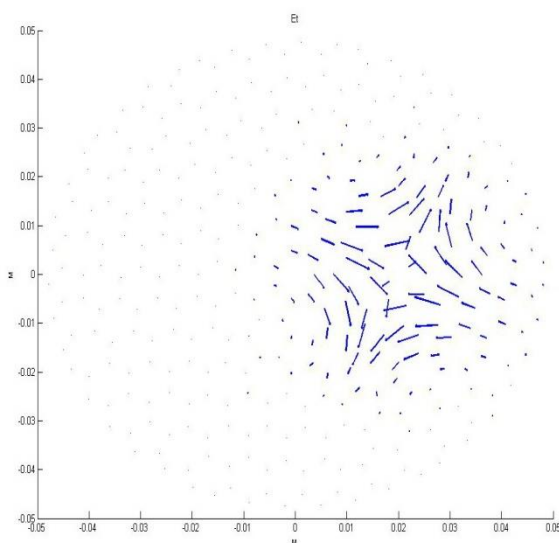


Рис. 2 а — об'єкт дослідження, б — розподіл поздовжньої компоненти, в — поперечних компонент



рацій для певних власних чисел дає неточні результати, тому можна застосувати проєкційно-ітераційні методи [14, 16] замість методу зворотних ітерацій.

На Рис. 2 наведено розподіл поля (власного вектора при $\beta = 352.4$) позовжньої компоненти E_z — Рис. 2 б і поперечних компонент — Рис. 2 в, для хвилеводу з однією неоднорідністю — Рис. 2 а. Параметри об'єкта на Рис. 2 а:

$R = 5 \text{ см}$, $\lambda = R$, $\varepsilon = 3$ $\varepsilon_i = 10$ - діелектрична проникність основної області та неоднорідності відповідно, при цьому об'єкта розбивався на 338 трикутників, що відповідає розміру СЛАР (14) — 723×723 .

Висновки

Наведено алгоритм для розв'язку задачі на власні значення відкритого поперечно неоднорідного діелектричного хвилеводу. Даний алгоритм можна модифікувати і для об'єктів з комплексною діелектричною проникністю. У цьому разі необхідно використовувати функції Ханкеля у (3)-(4) з $\chi_2 = -\sqrt{k_2^2 - \beta^2}$, що забезпечує згасання хвиль в поперечному напрямку [3].

Оскільки при розв'язку задачі збудження необхідно враховувати весь спектр хвиль відкритого хвилеводу, подальший розвиток даного питання може бути спрямованим на визначення реактивних хвиль та хвиль неперервного спектра.

Література

1. Барыбин А. А. Электродинамика волноведущих систем. Теория возбуждения и связи волн / Барыбин А. А. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 512 с. — ISBN: 978-5-9221-0740-2.
2. Okechukwu F. E. Medical imaging / F. E. Okechukwu— Croatia.: Intech Publisher, 2011. — 400 p. — ISBN 978-953-307-774-1.
3. Allilomes P. C. A Nonlinear Finite—Element Leaky—Waveguide Solver / P. C. Allilomes, G. A. Kyriacou // IEEE Trans. MTT. — 2007. — Vol. 55, №7. — P.1496—1510.
4. Allilomes P. C. A FEM analysis of open boundary structures using edge elements and a cylindrical harmonic expansion / P.C. Allilomes, G.A. Kyriacou, E.Vafiadis, J.N. Sahalos // Electromagnetics. — 2004. — Vol. 24, № 1—2. — P. 69—79.
5. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. — М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 544с. — ISBN: 5-02-014033-3.
6. Zhu Y. Multigrid finite element methods for electromagnetic field modeling / Y. Zhu, A.C. Cangellaris. — USA: Wiley—Interscencer, 2006. — 400 p. — ISBN: 100-471-74110-8.
7. Volakis J. L. Finite Element Method for Electromagnetics / J. L Volakis, A. Chatterjee, L. C. Kempel. — New York: IEEE PRESS, 1998. — 344p. — ISBN: 0-7803-3425-6.
8. Jin J. The finite element method in electromagnetics. Sc.Ed. / Jin J. — New York: Wiley—Interscience, 2002. — 753p. — ISBN: 0-471-43818-9.
9. Reddy C. J. Finite element method for eigenvalue problems in electromagnetics / C.J. Reddy, M. D. Deshpande, C. R. Cockrell, F. B. Beck // NASA, Langley Res. Center, Hampton, VA, Tech.Rep., 1994. — 28p.
10. Баландин М. Ю. Векторный метод конечных элементов / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. — Новосибирск: НГТУ, 2001. — 69с.
11. Peolsi G. Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves. Sc.Ed. / G. Peolsi, R. Coccioli, S. Selleri. — Boston, London: Artech House, 2009. — 289p. — ISBN: 978-1-59693-345-3.

12. Lee J. F. Full—Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangential Vector Finite Elements / J. F. Lee, D. K. Sun, Z. J. Cendes // IEEE Trans.MTT. — 1991. — Vol. 39, №8. — P. 1262—1271.
13. Jin J. Theory and computation of electromagnetic fields / J. Jin. — New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. — 572 p. — ISBN: 978-0-470-53359-8.
14. Ben-Shan Liao Nonlinear Rayleigh–Ritz iterative method for solving large scale nonlinear eigenvalue problems / B. Zhaojun, Lie-Quan Lee., Kwok Ko // Taiwanese journal of mathematics. — 2010. — Vol. 14, №3. — P.869—883.
15. Bai Z. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide / Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, H.Vorst. — Philadelphia: SIAM, 2000. — 410 p.
16. Voss H. An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems / H. Voss // BIT Numerical Mathematics. — 2004. — №44. — P. 387—401.
17. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. — М. : Радио и связь, 1988. — 440 с. — ISBN: 5-256-00064-0.
18. Маненков А.Б. Возбуждение открытых однородных волноводов / А.Б. Маненков // Известия Вузов. Радиофизика. — 1970. — Том 13, №5. — С. 739—748.
19. Goubau G. On the excitation of surface waves / G. Goubau // Proceedings of the IRE. — 1952. — Vol. 40, №7. — P. 865—868.
20. Collin R.E. Field theory of guided waves. Sec. Ed / Collin R.E. — New York. : Wiley Interscience, 1991. — 852 p. — ISBN: 0-87942-237-8.
21. Dudley D.G. Linear source in a circular tunnel / D.G. Dudley, S.F. Mahmoud // IEEE Trans. AP. — 2006. — Vol. 54, №7. — p. 2034—2047.
22. Yip G.L. Launching Wave Efficiency of the HE₁₁ surface wave mode on a dielectric rod / G.L. Yip // IEEE Trans. MTT. — 1970. — Vol. 18, №12. — P. 1033—1041.
23. Yip G.L. Launching Efficiency of the HE₁₁ surface wave mode on a dielectric tube / G.L. Yip, T. Auyeung // IEEE Trans. MTT. — 1974. — Vol. 22, №1. — P. 6—14.
24. Safaai-Jazi A. Scattering from an Arbitrarily Located Off-Axis Inhomogeneity in a Step-Index Optical Fiber / A. Safaai-Jazi, G.L. Yip // IEEE Trans. MTT. — 1980. — Vol. 28, №1. — P. 24—32.
25. Duncan J.W. The efficiency of excitation of a surface wave on a dielectric cylinder / J.W. Duncan // IRE Trans. MTT. — 1959. — Vol. 7, №2. — P.257—268.
26. Hanham S.M. High efficiency excitation of dielectric rods using a magnetic ring current / S.M. Hanham, T.S. Bird // IEEE Trans. AP. — 2008. — Vol. 56, №6. — P. 1805—1808.
27. Каценеленбаум Б.З. Симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра / Б.З. Каценеленбаум // Журнал Технической Физики. — 1949. — Том 19, № 10. — С.1168—1181.
28. Каценеленбаум Б.З. Несимметричные колебания бесконечного диэлектрического цилиндра / Б.З. Каценеленбаум // Журнал Технической Физики. — 1949. — Том 19. — №10. — С.1182—1191.
29. Person P.L. A simple mesh generator in Matlab / P.L. Person., G. Strang. — Режим доступу: <http://persson.berkeley.edu/distmesh>

References

1. Barybin A. A. (2007) *Elektrodinamika volnovodushchikh sistem. Teoriya vzbuzhdeniya i svyazi voln* [Electrodynamics of waveguide system. Excitation and mode coupling theory]. Moscow, 512 p.
2. Okechukwu F. E. (2011) *Medical imaging*. Croatia, Intech Publisher, 400 p.
3. Allilomes P. C. and Kyriacou G.A. (2007) A Nonlinear Finite-Element Leaky-Waveguide Solver. *IEEE Trans. MTT*. Vol.55, No 7, pp. 1496–1510.

4. Allilomes P. C., Kyriacou G., Vafiadis E., Sahalos J. N. (2004) A FEM analysis of open boundary structures using edge elements and a cylindrical harmonic expansion. [*Electromagnetics*](#). Vol.24, No 1, pp.69–79.
5. Nikolskiy V. V. and Nikolskaya T. Y. (1989) *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln* [Electrodynamics and wave propagations]. Moscow, 544p.
6. Zhu Y. and Cangellaris A. C. (2006) *Multigrid finite element methods for electromagnetic field modeling*. USA, Wiley–Interscencer, 400 p.
7. Volakis J. L., Chatterjee A. and Kempel L.C. (1998) *Finite Element Method for Electromagnetics*. New York, IEEE PRESS, 344p.
8. Jin J. (2002) *The finite element method in electromagnetics*. New York, Wiley–Interscience, 753p.
9. Reddy C. J., Deshpande M. D., Cockrell C.R. and Beck F.B. (1994) *Finite element method for eigenvalue problems in electromagnetics*. NASA, Langley Res.Center, Hampton, VA, Tech.Rep., 28p.
10. Balandin M. Yu. and Shurina E. P. (2001) *Vektorny metod konechnykh elementov*. [Vector finite element method]. Novosibirsk, 69p.
11. Peolsi G., Coccioli R. and Selleri S. (2009) *Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves*. Boston, London, Artech House, 289p.
12. Lee J.F., Sun D.K., Cendes Z.J. (1991) Full–Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangential Vector Finite Elements. [*IEEE Trans.MTT*](#). Vol. 39, No 8, p. 1262–1271.
13. Jin J. (2010) *Theory and computation of electromagnetic fields*. New Jersey, John Wiley & Sons, 572p.
14. Ben-Shan Liao., Zhaojun Bai., Lie-Quan Lee and Kwok Ko. (2010) Nonlinear Rayleigh-Ritz iterative method for solving large scale nonlinear eigenvalue problems. [*Taiwanese journal of mathematics*](#). Vol. 14, No 3, pp.869–883.
15. Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A., Vorst H. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide. Philadelphia, SIAM, 2000. 410p.
16. Voss H. (2004) An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems. [*BIT Numerical Mathematics*](#). No 44, pp. 387–401.
17. Vaynshtein L. A. (1988) *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow, 440p.
18. Manenkov A. B. (1970) The excitation of open homogeneous waveguides. [*Radio-physics and Quantum Electronics*](#). Vol 13, No 5, pp. 578-586.
19. Goubau.G. (1952) On the excitation of surface waves. [*Proceedings of the IRE*](#). Vol. 40, No 7, p.865-868.
20. Collin R.E. *Field theory of guided waves*. New York, Wiley Interscience, 1991, 852p.
21. Dudley D. G., Mahmoud S. F. (2006) Linear source in a circular tunnel. [*IEEE Trans. AP*](#). Vol. 54, No 7, p.2034-2047.
22. Yip G. L. (1970) Launching Wave Efficiency of the HE₁₁ surface wave mode on a dielectric rod. [*IEEE Trans. MTT*](#). Vol.18, No 12, p. 1033-1041.
23. Yip G. L., Auyeung T. (1974) Launching Efficiency of the HE₁₁ surface wave mode on a dielectric tube. [*IEEE Trans. MTT*](#). Vol. 22, No 1, p.6-14.
24. Safaai-Jazi A., Yip.G. L. (1980) Scattering from an Arbitrarily Located Off-Axis Inhomogeneity in a Step-Index Optical Fiber. [*IEEE Trans. MTT*](#). Vol. 28, No 1, p.24-32.
25. Duncan.J.W. (1952) The efficiency of excitation of a surface wave on a dielectric cylinder. [*IRE Trans. MTT*](#). Vol. 7, No 2, p.257-268.
26. Hanham S. M., Bird T. S. (2008) High efficiency excitation of dielectric rods using a magnetic ring current. [*IEEE Transaction On Antennas and Propagation*](#). Vol. 56, No 6, p. 1805-1808

27. Kacenelenbaum B. Z. (1949) Symetrichnoe возбуждение beskonechnogho dielektrycheskogo cilindra [Symmetrical excitation of dielectric rod]. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*. Vol 19, No 10, pp. 1168–1181.

28. Kacenelenbaum B. Z. (1949) Nesimetrichnye kolebaniya beskonechnogho dielektricheskogo cilindra [Unsymmetrical excitation of dielectric rod]. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*. Vol. 19, №10, pp. 1182–1191.

29. Person P. L., Strang G. A simple mesh generator in Matlab. Available at: <http://persson.berkeley.edu/distmesh>

Гусева О. В., Горб М. С. **Задача на власні значення відкритого неоднорідного діелектричного хвильоводу.** Наведено алгоритм для розрахунку власних хвиль та власних значень поперечно неоднорідного діелектричного хвильоводу, який поєднує метод кінцевих елементів та розклад поля по циліндричним гармонікам у зовнішній необмеженій області. Отримані результати розрахунку для поверхневих хвиль. Наведено огляд літератури зі збудження відкритих хвильоводів, з якого слідує необхідність врахування повного спектра хвиль при розрахунку діелектричних структур методом розкладу полів по власним функціям.

Ключові слова: неоднорідний відкритий діелектричний хвильовід, власні хвилі, власні значення, метод кінцевих елементів, збудження відкритих хвильоводів, метод мікрохвильової візуалізації.

Гусева Е. В., Горб Н. С. **Задача на собственные значения открытого неоднородного диэлектрического волновода.** Приведен алгоритм решения задачи на собственные значения поперечно неоднородного диэлектрического волновода. Используется метод конечных элементов совместно с разложением поля по цилиндрическим гармоникам во внешней неограниченной области. Получены результаты расчета для поверхностных волн. Приведен обзор работ по возбуждению открытых волноводов, из которого следует необходимость учета полного спектра волн при расчете диэлектрических структур методом разложения полей по собственным функциям.

Ключевые слова: неоднородный открытый диэлектрический волновод, задача на собственные значения, метод конечных элементов, возбуждение открытых волноводов, метод микроволновой визуализации.

Guseva E. V., Gorb M. S. **Eigenvalue problem of open inhomogeneous dielectric waveguide.**

Introduction. Algorithm for solving eigenvalue problem of open inhomogeneous dielectric waveguide is presented. Open waveguide is divided in two regions. Inner inhomogeneous region is discretized using node-edge finite elements. Fields in outer unbounded homogeneous region are expanded into cylindrical harmonics. The final nonlinear eigenvalue problem is solved using inverse iteration procedure.

Results. Surface waves of circular inhomogeneous object are calculated. Literature overview on the excitation of open waveguide is presented.

Conclusions. The algorithm allows to determine the discrete spectrum of waves in open inhomogeneous waveguide

Keywords: inhomogeneous dielectric waveguide, eigenvalue problem, finite element method, open waveguide excitation, microwave imaging